Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Ein (M,F)-Problem mit Nebenbedingungen

In einer früheren Arbeit[1] ist das vorliegende Problem recht unvollständig gelöst worden. Die daselbst geäusserte Vermutung, dass die einparametrige Schar der geraden Kreiskegel in der vollen Klasse der konvexen Rotationskörper[2] der festen Länge $1 > 0$[3] extremal sei, kann nun mindestens für die Teilklasse I (Äquatorradius am Rand) bestätigt werden.

Zum Beweis greifen wir auf einen Kegelstumpf-Kegel I_2 zurück, für den $a > 0$ und damit

$$\sin\alpha < \frac{\sin\beta(5\sin\beta - 3)}{1 - 3\sin\beta + 4\sin^2\beta} \tag{1}$$

gilt. Aus (1) folgt noch

$$\sin\beta > {}^3/_5{}^4 \tag{2}$$

und ausserdem gilt

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \pi/2 \tag{3}$$

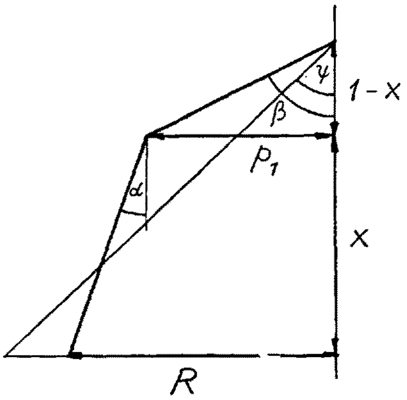

Abbildung 1.

Elementare Rechnungen ergeben:

$$F_1 = \pi[ax^2 - 2bx + c]; \; M_1 = \pi[\,-dx + e], \tag{4}$$

wobei ausdrücklich $a > 0$ vorausgesetzt wird[5]. Die Masszahlen eines Kegels aber sind von der Form

$$F_2 = C(\psi); \; M_2 = E(\psi). \tag{5}$$

In einer (M,F)-Ebene sind die Parabel (4) und die Kegelkurve (5) *von unten konvex*. Es kann deshalb im Gegensatz zum Falle $a \leqslant 0$ nicht so einfach gefolgert werden, dass der Parabelbogen *ganz nicht unterhalb* der Kegelkurve liegt. Wir lassen nun (Abb. 1) x das Intervall $0 \leqslant x \leqslant 1$ durchlaufen und erzeugen so eine einparametrige Schar von Kegelstumpf-Kegeln, wobei Anfangs- und Endkörper Kegel sind. Hernach lassen wir ψ das Intervall $\alpha \leqslant \psi \leqslant \beta$ durchlaufen und erzeugen so eine Kegelschar. Weiter stellen wir einem Kegelstumpf-Kegel einen Kegel mit gleichem M gegenüber. Gemäss (4) und (5) kann x bequem eliminiert werden, und man erhält die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} d^2(\mathrm{F}_1 - F_2) &= \Phi(\psi;\alpha,\beta) \\ &\equiv a(e-E)^2 - 2bd\,(e-E) + d^2(c-C) \end{aligned}} \tag{6}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\beta}{1-\sin\beta} - 2\,\mathrm{tg}\,\beta \cdot \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \\ b &= \mathrm{tg}\beta\left(\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right); \; d = \mathrm{tg}\,\beta\,(\pi/2+\beta) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - \mathrm{tg}\,\alpha\,(\pi/2-\alpha) \\ c &= \frac{\sin\beta}{1-\sin\beta;}; \; C = \frac{\sin\psi}{1-\sin\psi}; \; e = \mathrm{tg}\,\beta\,(\pi/2+\beta); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad E = \mathrm{tg}\,\psi\,(\pi/2+\psi). \end{aligned}} \tag{7}$$

Man setzt noch abkürzend:

$$\Phi(\psi;\alpha,\beta) = a\cdot\Phi_1^2 - 2bd\cdot\Phi_1 + d^2\cdot\Phi_2 \tag{8}$$

$$\Phi_1 = \mathrm{tg}\,\beta\,(\pi/2+\beta) - \mathrm{tg}\psi\,(\pi/2+\psi); \; \Phi_2 = \frac{\sin\beta}{1-\sin\beta} - \frac{\sin\psi}{1-\sin\psi.}$$

Φ hat, wie es sein muss, die Nullstellen $\psi = \alpha$ und $\psi = \beta$. Wir zeigen, dass Φ im Intervall $\alpha < \psi < \beta$ positiv ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir die *Minorante*

$$\Phi = d[-2b\cdot\Phi_1 + d\cdot\Phi_2]. \tag{9}$$

Es ist:

$$\Phi(\beta;\alpha,\beta) = 0; \Phi(\alpha;\alpha,\beta) < 0 \text{ für } \alpha < \beta$$
$$\Phi'(\beta;\alpha,\beta) = \Phi'(\beta;\alpha,\beta).$$

Gemäss (8) berechnet man:

$$\Phi(\psi;\alpha,\beta) = d\left[2b\,\{\mathrm{tg}\,\varphi(\pi/2+\varphi)\} - d\cdot\frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right]_\beta^\psi$$

$$\Phi' = \frac{d}{\cos^2\psi\,(1-\sin\psi)}\,[2b\,(1-\sin\psi)\,(\pi/2+\psi+\sin\psi\cos\psi) \\ - d\cdot\cos\psi\,(1+\sin\psi)] \tag{10}$$

Das Vorzeichen von Φ (β,α,β) hängt ab vom Ausdruck

$$\Psi(\alpha,\beta) = 2\sin\beta\,(\pi/2+\beta+\sin\beta\cos\beta)\left[\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha)}\right] \\ - (1+\sin\beta)^2[\mathrm{tg}\,\beta(\pi/2+\beta) - \mathrm{tg}\,\alpha(\pi/2+\alpha)]. \tag{11}$$

Es gilt:

---

[1] H. Bieri, Exper. *9*, 207 (1953).

[2] Bekanntlich ist die Teilklasse der n-gliedrigen Polygonalkörper von genügender Allgemeinheit, um Aussagen über die volle Klasse zu gewinnen.

[3] Bis auf die Schlussungleichung (17) werden wir $l = 1$ setzen, was unwesentlich ist.

[4] Für $\sin\beta \leqslant {}^3/_5$ fällt a für jedes α aus dem Intervall ${}^3/_5 > \sin\alpha \geqslant 0$ negativ aus.

[5] Der Fall $a \leqslant 0$ wurde in der erwähnten früheren Arbeit erledigt.

$\Psi\ (\beta, \beta) = 0.\ \Psi\ (0, \beta) = \sin\beta\ [(2-\cos\beta)\ (2\sin\beta - \pi/2 - \beta) - 2\sin\beta\ (1-\sin\beta)]^6 < 0. \qquad (12)$

Ferner ist[7]

$$\frac{\partial\ \Psi(\alpha, \beta)}{\partial\ \alpha} = (1+\sin\beta)^2 \left[\frac{[\pi/2+\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha]}\right] - 2\sin\beta \left(\frac{1}{1-\sin\alpha}\right). \qquad (13)$$

Das Vorzeichen der rechten Seite von (13) hängt ab von

$$\Psi_1(\alpha, \beta) = (1+\sin\beta)^2\ (\pi/2+\alpha+\sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin\beta(1+\sin\alpha). \qquad (14)$$

Wegen $\Psi_1(0, \beta) = (1+\sin\beta)^2\,\pi/2 - 2\sin\beta > 0$;

$\Psi_1(\beta, \beta)^8 > 0$ und $\dfrac{\partial\ \Psi_1}{\partial\ \alpha} = 2\ \cos\alpha\,[1+\sin\ \beta)^2\cos\alpha - \sin\beta]^9$

kann geschlossen werden, dass $\Psi\ (\alpha, \beta)$ und somit auch $\Phi'(\beta; \alpha, \beta)$ negativ sind. Es gibt also in einer linksseitigen Umgebung von $\psi = \beta$ eine *positive Minorante*. Dieselbe besitze für $\psi = \psi_1$ eine erste Nullstelle. Die Funktion $\Phi + a \cdot \Phi_1\ (\psi_1)$ ist daselbst positiv. Berücksichtigt man jetzt noch, dass die Funktion $a \cdot \Phi_1\ (\psi)$ mit fallendem ψ monoton wächst, so sieht man ein, dass im Intervall $\beta \geqslant \psi > \alpha$ eine unendliche Folge von *nichtnegativen Minoranten* konstruiert werden kann.

Dieser Umstand zusammen mit $\Phi\ (\alpha; \alpha, \beta) = 0$ verbürgt im Intervall $\alpha < \psi < \beta$ die Aussage $\Phi > 0$. Damit wissen wir aber, dass kein Kegelstumpfkegel I_2 kleinste Oberfläche F besitzen kann.

Weiter betten wir einen Doppelkegelstumpf I_2 in eine einparametrige Körperschar ein (Abb. 2), indem wir x von Null an wachsen lassen.

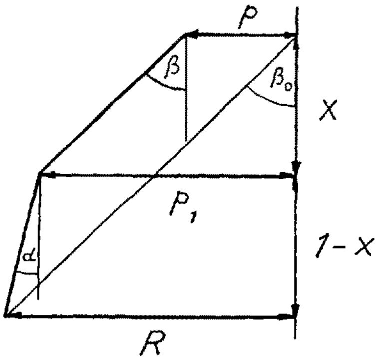

Abbildung 2.

Der Anfangskörper ist ein Kegelstumpf, der Endkörper wegen der getroffenen Wahl $\beta > \beta_0$[10] ein *Kegelstumpfkegel*. Wiederum hat F die Form (4) mit $a \leqslant 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $\alpha = \beta$ gilt. Der betrachtete Parabelbogen ist diesmal *von unten konkav*, und die Doppelkegelstümpfe können also unmöglich kleinstes F aufweisen.

Auch jeden *Doppelkegelstumpf-Kegel* kann man einbetten (Abb. 3). Die Stützebene durch A wird nach innen verschoben. Je nach der Grösse von φ läuft sie schliesslich durch B oder S, so dass End- und Anfangskörper nur 2 Segmente aufweisen.

Man berechnet:

$$x = p \cdot \operatorname{cotg}\beta \qquad y = (p_1 - p)\operatorname{cotg}\varphi \qquad z = (R - p_1)\operatorname{cotg}\alpha\ .$$

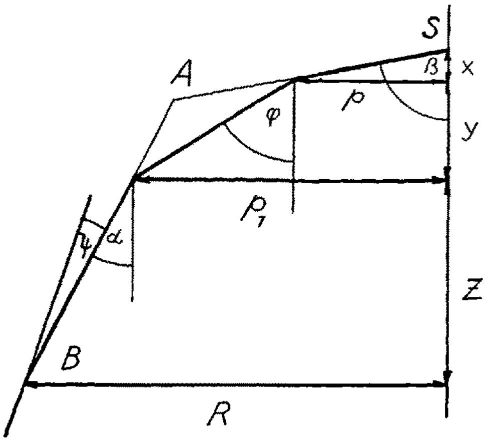

Abbildung 3.

Wegen $x + y + z = 1$ ist p_1 eine lineare Funktion von p, und man erhält weiter:

$$F = \pi[R^2(1+\operatorname{cosec}\alpha) + ap^2] \quad \text{mit}$$

$$a = -[\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\varphi)^2\ (\operatorname{cosec}\varphi - \operatorname{cosec}\beta) + (\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{cotg}\beta)^2 . (\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cosec}\varphi)] < 0$$

$$\text{für } \varphi \neq \alpha, \varphi \neq \beta, \alpha \neq \beta. \qquad (15)$$

Der betrachtete Parabelbogen ist also von unten konkav, und die zugehörigen Körper besitzen nicht kleinstes F. Fügt man jetzt in B weitere Segmente an, die beim besprochenen Abschleifungsprozess unangetastet bleiben, so ändert sich auch a nicht. Ein *Dreifachkegelstumpf* endlich lässt sich so einbetten, dass die Endkörper der Schar entweder beide *Doppelkegelstümpfe* sind oder der eine ein *Doppelkegelstumpf*, der andere ein *Doppelkegelstumpf-Kegel* (vgl. Abb. 2). Wieder ist der erzeugte Parabelbogen *von unten konkav*, und die ganze Körperschar ist nicht extremal. An diesem Resultat wird auch durch Ansetzen weiterer Segmente nichts geändert. Damit ist der Beweis geleistet[11].

Das gefundene Resultat lässt sich auch durch eine Ungleichung ausdrücken.

Für konvexe Rotationskörper I von der festen Länge 1 gilt (unter Benützung von (7)) die Ungleichung

$$M \leqslant \frac{\pi\, l \cdot F}{\sqrt{(\pi\, l^2 + F)^2 + F^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{F}{\pi\, l^2 + F}\right)^{12}\right]. \qquad (17)$$

Das Gleichheitszeichen wird nur von den *geraden Kreiskegeln* beansprucht.

H. BIERI

Bern, den 7. Juni 1956.

Summary

In a former publication, the problem could only be solved under two restrictions. Proof is now given that the cones are extremal in the whole of class I.

---

[6] Elementare Diskussion zeigt, dass der Faktor $2\sin\beta - \beta - \pi/_2$ im zulässigen Intervall für β negativ ist.

[7] Man betrachtet α als Koordinate, β als Parameter°

[8] Schon die Minorante $(1 + \sin\beta)^2\pi/_2 - 2\sin\beta\ (1 + \sin\beta)$ wird leicht als positiv erkannt.

[9] Die Klammer ist für $\alpha = 0$ positiv und besitzt im Intervall $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ höchstens 1 Nullstelle.

[10] Der Fall $\beta \leqslant \beta_0$ wurde in der zitierten Arbeit erledigt.

[11] Selbstredend muss auch noch der Fall $\alpha = 0$ (Abb. 1) erledigt werden. Die diesbezüglichen Rechnungen sind elementar.

[12] Statt M hätte durchwegs $M + \pi l$ geschrieben werden müssen, was zwecks Vereinfachung unterblieb.